

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ШТУЧНИХ  
ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА ДЛЯ  
УНИКНЕННЯ ПЕРЕШКОД В РЕЖИМІ РЕАЛЬНОГО ЧАСУ**

Берізка І.А.,

Карбовник І.Д. (ORCID: 0000-0002-3697-4902)

*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. ген. Тарнавського 107,  
Львів, 79017, Україна*

**MATHEMATICAL MODEL OF MODIFIED REAL-TIME OBSTACLE  
AVOIDANCE METHOD BASED ON LAPLACE ARTIFICIAL POTENTIAL FIELD**

Berizka I.A., Karbovnyk I.D.

*Ivan Franko Lviv National University, 107, Tarnavskogo Str, Lviv, 79017, Ukraine*

**Abstract.** In the domain of robotics, a critical area of focus is autonomous mobile robots. These are sophisticated machines engineered with the ability to traverse through space autonomously, and endowed with the capacity to execute specific decisions in a real-time context. This implies that these robots can function independently, devoid of human intervention, and can adapt to their environment by making decisions predicated on the real-time data they acquire.

A fundamental component of the software infrastructure in such machines pertains to the algorithms for path planning and obstacle avoidance. These algorithms are pivotal as they endow the machines with capabilities such as automatic parking, circumventing emergency situations on the road, and even achieving full autonomy.

This highlights the complexity and sophistication of autonomous mobile robots and underscores the importance of ongoing research in this field. The development and refinement of effective obstacle detection and avoidance algorithms continue to be a key focus in robotics research, with the aim of enhancing the safety and efficiency of autonomous mobile robots. The Artificial Potential Field (APF) method is a classic technique in the field of robotics, particularly for path planning and obstacle avoidance. In the APF method, a virtual potential field is created where the target location and any obstacles in the environment generate attractive and repulsive forces, respectively. The robot, or autonomous agent, is then guided by these forces. It experiences an attractive force towards the target and a repulsive force away from obstacles. The robot moves under the action of the resultant force [1].

The subject matter of the article is a mathematical model that modifies the method of artificial potential fields, incorporating the use of Laplace functions. The method that has been developed is capable of identifying obstacles and calculating the likelihood of the robot colliding with these obstacles. The study delves into the process of deriving a mathematical model that can compute both attractive and repulsive fields. It also discusses the selection of equation parameters and a methodology for determining a safe trajectory for the robot's movement. Future work aims to put the derived model to the test, both in a ROS2/Webots simulation environment and on an actual hardware platform. This will provide a practical application and validation of the theoretical model.

**Keywords:** robotics, obstacle avoidance, artificial potential field method.

**Вступ.** У галузі робототехніки важливою складовою є автономні мобільні роботи. Це складні машини, які розроблені із можливістю самостійно переміщатися у просторі і вміють приймати конкретні рішення в реальному часі. Це означає, що ці роботи можуть функціонувати незалежно, без людського втручання, і можуть адаптуватися до свого оточення, приймаючи рішення на основі реальних даних про робоче середовище, які вони отримують із різноманітних сенсорів.

Прикладами таких автономних мобільних роботів є роботи-офіціанти, які програмуються для подачі їжі та напоїв у закладах харчування, транспортні роботи, які використовуються в різних галузях для перевезення товарів зазвичай на автоматизованих складах. Також помітним прикладом автономних мобільних роботів є автономні автомобілі. Ці автомобілі оснащені передовими сенсорними технологіями та

алгоритмами, які дозволяють їм рухатися через трафік і досягати свого пункту призначення без водія. На сьогоднішній день лише кілька компаній частково наблизились до повної автономності в автомобілях.

Наведені приклади підкреслюють широкий спектр застосувань для автономних мобільних роботів і висвітлюють їх потенціал, що може революціонізувати різні сектори, від сфери обслуговування та транспорту до автомобільної промисловості та інших. Розробка та удосконалення цих роботів продовжують бути ключовим напрямком у сфері робототехніки, із постійними дослідженнями, спрямованими на покращення їхніх можливостей та розширення сфер їхнього застосування. Фундаментальним компонентом програмного забезпечення в таких машинах є алгоритми для планування шляху та уникнення перешкод. Ці алгоритми є важливими, оскільки вони надають машинам такі можливості, як автоматичне паркування, уникнення аварійних ситуацій на дорозі, та в кінцевому результаті досягнення повної автономності.

Планування шляху поділяють на дві категорії: глобальне та локальне. Глобальне планування шляху вимагає інформації, отриманої з географічної інформаційної системи (GIS), у поєднанні з глобальною локалізацією. Це передбачає, що робот має всеосяжне розуміння свого оточення в масштабах, що часто включають навігацію через місто або навіть країни. З іншого боку, локальне планування шляху вимагає лише відносного положення робота та виявлення перешкод у його безпосередньому оточенні. Це більше стосується робочого середовища робота та того, як він маневрує між перешкодами. Наприклад, уникаючи пішоходів на тротуарі або інших автомобілів на дорозі. Існує безліч алгоритмів, розроблених для вирішення як глобального, так і локального планування. Кожен алгоритм має свої переваги та недоліки, і вибір алгоритму може значно вплинути на ефективність та безпеку навігації робота. Більш вичерпний огляд алгоритмів планування шляху, застосувань у різних сценаріях та для різних типів роботів наведено у роботі [1].

**Методологія дослідження.** Виявлення та уникнення перешкод є невід'ємною частиною алгоритмів, що використовуються у локальному плануванні шляху, відіграючи ключову роль у забезпеченні безпеки як робота, так і його робочого середовища. Ця галузь була предметом глибоких досліджень протягом кількох десятиліть, і досліджено широкий спектр підходів. Деякі з цих методів знайшли практичне застосування в реальних сценаріях, що підкреслює їхню ефективність. Для того, щоб робот уникнув зіткнення з іншим об'єктом, важливо, щоб він не тільки виявляв перешкоду, але й перераховував свій шлях та коригував свою поточну траєкторію руху в реальному часі. Це вимагає від робота високих обчислювальних можливостей та здатності приймати рішення в реальному часі на основі даних, які він отримує від сенсорів. Робот спочатку повинен використовувати свої датчики для виявлення потенційних перешкод на своєму шляху. Після виявлення перешкоди робот повинен розрахувати альтернативний шлях, тобто шлях який оминає перешкоди. Цей шлях повинен бути розрахований достатньо швидко, щоб дозволити роботу коригувати свою траєкторію в реальному часі, тим самим уникаючи зіткнення.

Проблему уникнення перешкод можна описати наступним чином: робот  $A$  розміщується в невідомому середовищі. Роботу дається цільова точка або напрямок, і він повинен рухатися до цієї цілі, уникаючи будь-яких перешкод, які можуть бути на його шляху. Робоче середовище робота із кількома перешкодами  $O$ . Ці перешкоди можуть бути статичними або динамічними і можуть варіюватися за розміром, формою та іншими властивостями. Робот оснащений сенсорами, які забезпечують його певною «зоною чутливості»  $S$ . Цю зону чутливості можна розглядати як радіус, в межах якого робот може виявити наявність інших об'єктів. Поточний напрямок руху робота представлений

вектором  $U$ . В будь-який момент часу завданням робота є рух у напрямку цього вектора, уникаючи при цьому зіткнень з будь-якими перешкодами.

Рисунок 1(a) ілюструє початковий етап задачі. Робот виявив перешкоду і рухається у заданому напрямку. Якщо ми екстраполюємо поточний напрямок руху робота, можна зауважити, що він призведе до зіткнення з перешкодою. Це вимагає впровадження механізму, який може скоригувати напрямок руху робота, щоб уникнути неминучого зіткнення. Саме тут вступають в дію алгоритми виявлення та уникнення перешкод. Алгоритми враховують поточне положення робота, положення цілі, положення перешкод та зону чутливості робота для обчислення безпечного шляху для робота. Сценарій, зображений на рисунку 1 (b), слугує ілюстративним прикладом стратегії уникнення перешкод. У конкретний момент часу, позначений як  $t(i)$ , робот потенційно стикається з перешкодою на своєму шляху. Це спричиняє активацію механізму виявлення перешкод робота, що змушує його скоригувати свою траєкторію, представлену змінною  $U$ .

Робот продовжує рух по новому шляху та настає моменту часу  $t(i) + T$ . На цьому етапі робот виявляє наявність іншої перешкоди. Це вимагає подальшого коригування його траєкторії, що спонукає до подальшої корекції напрямку руху  $U$ . Цей процес виявлення перешкод та коригування траєкторії робота не є одноразовою подією, а ітеративним процесом. Робот постійно сканує своє оточення на предмет потенційних перешкод, роблячи необхідні корекції свого шляху, аж поки він успішно не доїде до попередньо визначеної цільової точки.

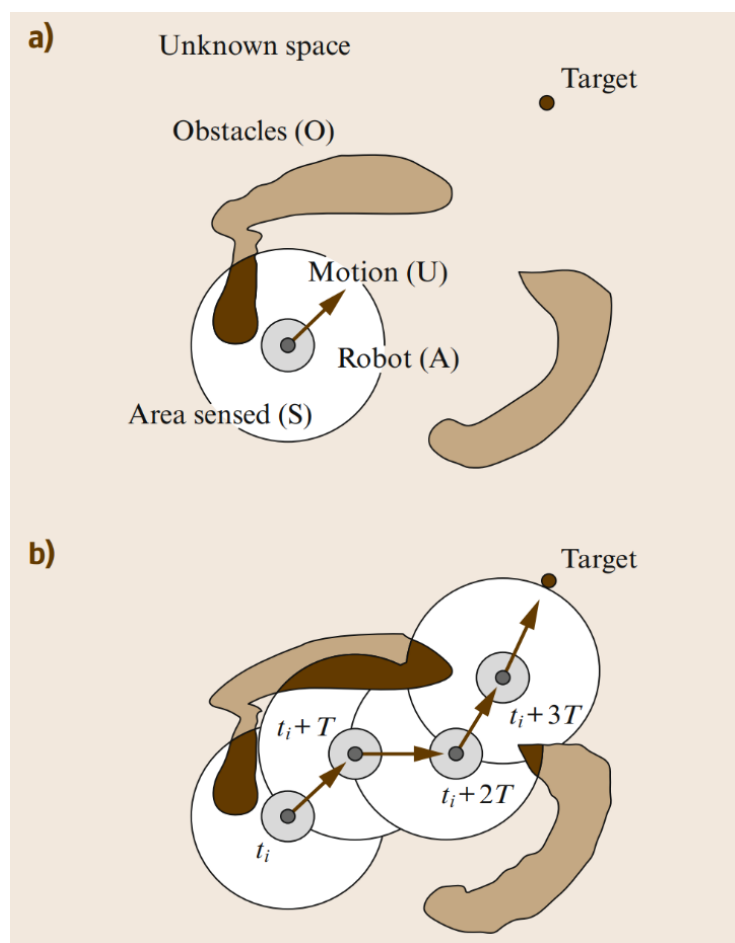


Рис. 1. (a) Задача виявлення та уникнення перешкод та (b) ітеративний процес вирішення задачі. Адаптовано із [5].

Метод штучного потенційного поля (APF – Artificial Potential Field) – це один із класичних підходів у галузі робототехніки для планування маршруту та уникнення перешкод. Цей метод вперше був запропонований Хатібом у 1984 році [2]. У методі APF створюється віртуальне потенціальне поле, де цільова точка та будь-які перешкоди в середовищі генерують притягуючі та відштовхуючі сили відповідно. Робот переміщується у робочому середовищі під дією цих сил. Він відчуває притягуючу силу до цілі та відштовхуючу силу від перешкод. Робот рухається під дією результуючої сили. Математично цей процес описують рівняння (1), (2) та (3). Напрямок руху співпадає із напрямком результуючої сили.

$$f_{total} = f_{att} + f_{rep} \quad (1)$$

$$f_{att} = k_{att} * \left( \frac{r_{goal} - r}{|r_{goal} - r|} \right) \quad (2)$$

$$f_{rep} = \begin{cases} -k_{rep} * \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{max}} \right) * s_i, & \text{if } d_i < d_{max} \\ 0 & \end{cases} \quad (3)$$

Однак, традиційний метод APF має певні недоліки та обмеження. Наприклад, він може призвести до проблем з локальними мінімумами (рис. 2), коли робот застрягає в позиції, яка не є цільовою, тому що сили генеровані цільовою точкою та сили генеровані перешкодами взаємно нейтралізуються. Метод також може призвести до недосяжних цілей та неефективних шляхів [3].

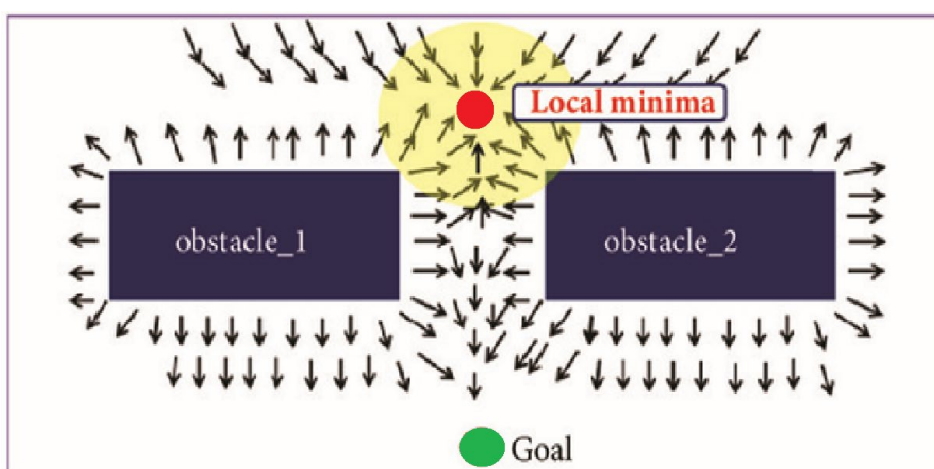


Рис. 2. Графічне представлення проблеми локальних мінімумів. Адаптовано із [4].

Щоб розв'язати ці проблеми, запропоновано вдосконалені версії класичного методу штучних потенціальних полів. Наприклад, одне дослідження представляє вдосконалений метод APF, який додає коефіцієнт корекції відстані до функції репульсивного потенціального поля для вирішення проблеми коли цільова точка недосяжна через занадто близьку перешкоду біля неї (GNRON – Goal Non-Reachable with Obstacle Nearby). Цей метод також пропонує підхід, керований правильним шестикутником, для часткового вирішення проблеми локальних мінімумів [3]. Більше того, вдосконалений метод враховує не тільки просторове розташування, але й величину та напрямок швидкості рухомих об'єктів і завдяки цьому може уникнути динамічних

перешкод вчасно. Тому він підходить для середовищ із статичними та динамічними перешкодами [3].

Інший підхід до модифікацій класичного APFM базується на ймовірностях і представлений у [4]. Метод ODG-PF був розроблений та впроваджений для виявлення перешкод та розрахунку ймовірності зіткнення з ними. У статті представлено новий метод розрахунку атрактивного та репульсивного полів та вибір безпечного напрямку руху. Автори провели симуляції та експерименти та порівняли метод ODG-PF з іншими методами уникнення перешкод на основі потенціальних полів. Результати показали, що метод ODG-PF працював найкраще в більшості випадків. Підсумовуючи, метод APF та його вдосконалені версії надають ефективні стратегії для реального планування маршруту та уникнення перешкод у робототехніці. Однак, для усунення його обмежень та покращення його роботи в більш складних та динамічних середовищах все ще потрібні подальші дослідження та вдосконалення [5]. Також варто зазначити, що метод працює не лише для колісних роботів. У [6, 7, 8, 9] описано використання модифікації алгоритму штучних потенціальних полів для безпілотників. Також доволі активно проводять дослідження модифікацій методу для застосування із різного роду маніпуляторами [10, 11, 12].

Для побудови математичної моделі для подальших розрахунків потрібно ввести пару чисел  $(\theta, d)$  де  $\theta$  позначає кут вимірювання в градусах, а  $d$  - відстань до об'єкта в метрах (див. рис. 3). Для отримання даних у такому форматі, зазвичай використовуються системи, що базуються на ультразвукових сенсорах відстані або LIDAR сенсорах. Цей підхід дозволяє точно представити просторове положення та відстань до об'єктів.

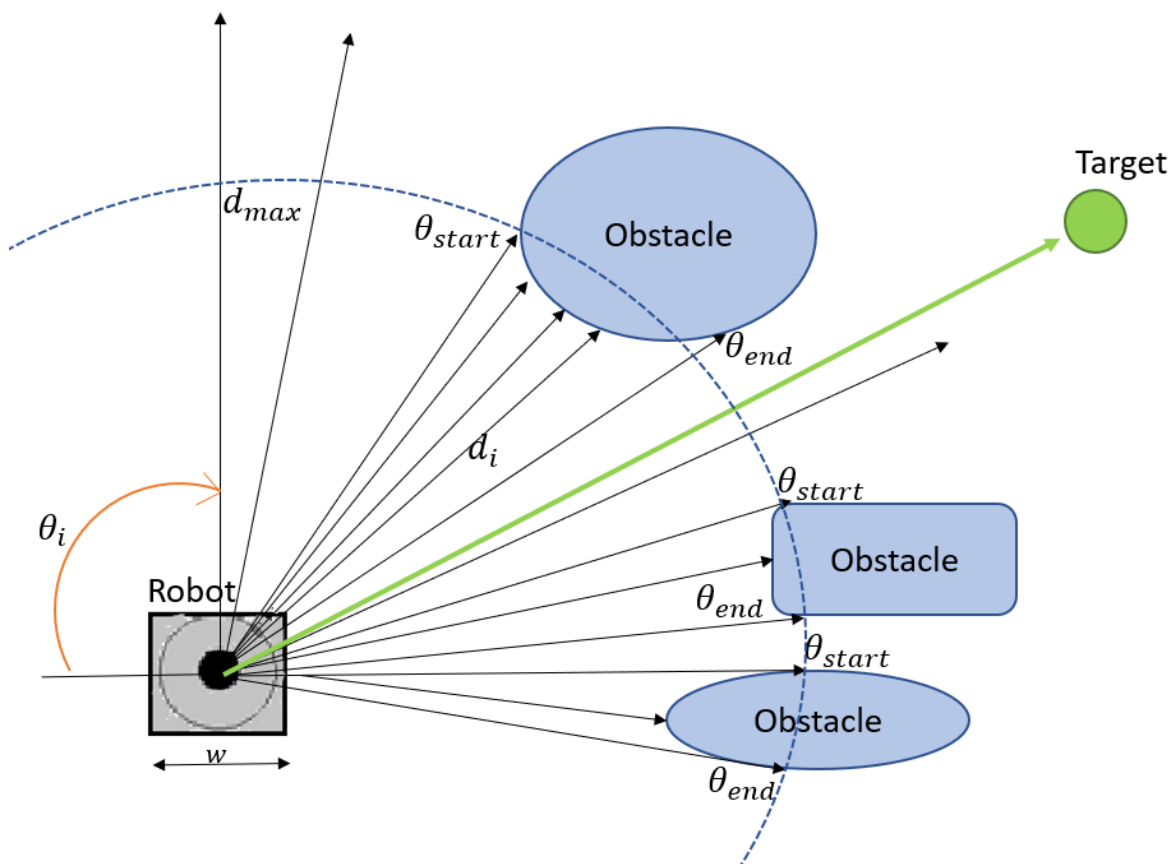


Рис. 3. Спрощена схема сканування робочого середовища робота.

Першим кроком алгоритму є встановлення порогової відстані (пунктирне півколо на рис. 3). Це один з параметрів, який потрібно вибрати експериментально, враховуючи робоче середовище та геометричні розміри робота. Все, що ближче за цю відстань, вважається перешкодою. Вибір порогової відстані може значно вплинути на продуктивність навігації робота та здатності уникати перешкод та зазвичай визначається характеристиками сенсорів. Далі необхідно отримати дані про оточуюче середовище - фактично, дані, зібрані системою з LIDAR сенсором. На рис. 3 показано приклад з трьома перешкодами. Кожна перешкода описується декількома параметрами. На цьому етапі це кути  $(\theta_{start}, \theta_{end})$ . Відповідно, це кут, під яким перешкоду вперше помічено перешкоду  $\theta_{start}$ , і кут, під яким перешкода закінчується  $\theta_{end}$ . Всі подальші розрахунки базуються на цих даних.

Розглянемо модельовані дані, які для моделювання роботи алгоритму зберігаються в конфігураційних файлах у вигляді пар чисел  $(\theta_{start}, \theta_{end})$ .

У використаному файлі формуються дві перешкоди різних геометричних форм. Графік на рис. 4 показує дві криві з даними, отриманими після перших двох етапів алгоритму. Горизонтальна лінія  $y = 2$  відповідає пороговому значенню 2 м. Якщо є певний неперервний інтервал даних нижче порогового значення – вважається, що виявлено перешкоду, яка знаходиться в межах  $(\theta_{start}, \theta_{end})$ . Також необхідно розрахувати середню відстань до кожної з перешкод  $d_k$ , та кут, який охоплює перешкода (4).

$$\phi_k = \theta_{end} - \theta_{start} \quad (4)$$

Ці дані будуть використані на наступних етапах алгоритму.



Рис. 4. Вхідні дані для тестування алгоритму.

Для наближення моделі до реальних умов необхідно врахувати геометричні розміри робота. У багатьох експериментах або комп'ютерних симуляціях розміри робота не враховуються, тобто він вважається матеріальною точкою. Все це робиться для спрощення моделей. Однак при більш точних дослідженнях потрібно враховувати розміри. Це призведе до деякого ускладнення моделі, але повинно дати більш точні дані

в реальному житті. Цей метод використовує частково інший підхід - враховуються геометричні розміри робота, але вони впливають на перешкоди за певними формулами, і відповідно ці перешкоди збільшуються в розмірах. Таким чином, фактичний розмір робота додається до розмірів перешкод, і сам робот може вважатися матеріальною точкою. Цей процес графічно представлено на рис. 5.

Математично цей процес описується формулами наведеними у статті [4]. Якщо враховувати ширину робота, необхідно перерахувати кут  $\varphi_k$  використовуючи рівняння (5).

$$\varphi_k = 2 \cdot \sigma_k = 2 \cdot \operatorname{atan2}\left(d_k \cdot \tan\frac{\phi_k}{2} + \frac{w_{\text{robot}}}{2}, d_k\right), \quad (5)$$

де  $d_k$  - середня відстань до  $k$ -ої перешкоди.

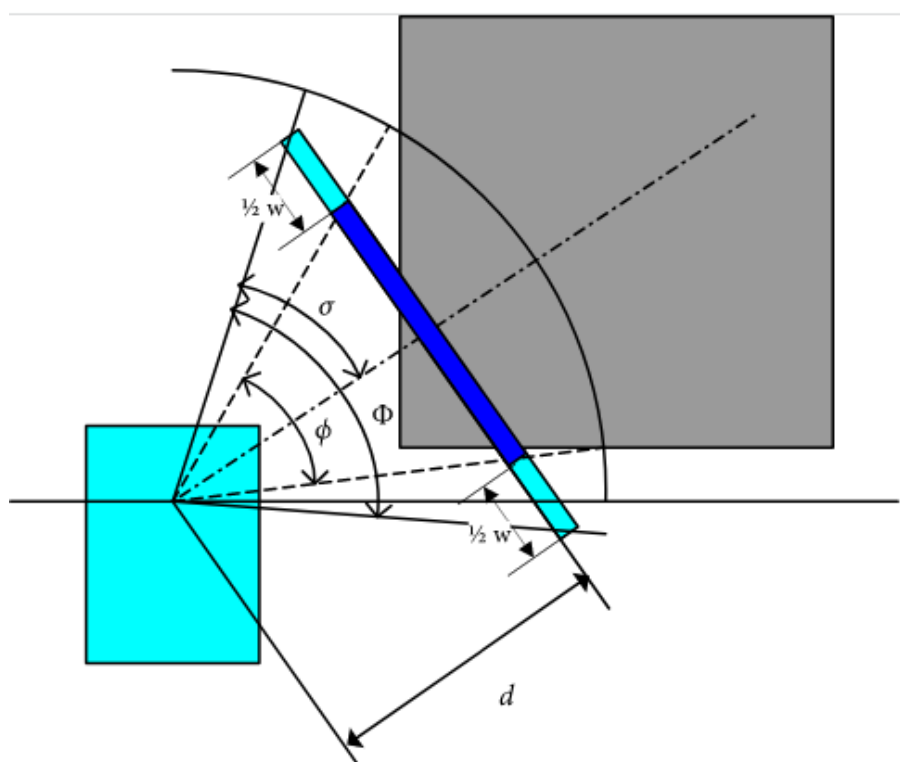


Рис. 5. Графічне представлення процесу збільшення перешкод.

Темно-синя частина смужки на рис. 5 показує, як робот “бачить” перешкоду та який кут вона покриває. Перешкода після процесу збільшення, враховуючи розміри робота, позначена світло-синім кольором. Також з цим значенням можна виконувати різні маніпуляції, щоб досягти різних результатів. Наприклад, до ширини робота можна додати кілька сантиметрів для більшої впевненості, що не буде зіткнень. Це призведе до зниження оптимальності шляху до цілі, але покращить безпеку.

**Результати дослідження та їхнє обговорення.** Алгоритм передбачає обчислення репульсивного поля. Це векторне поле, яке визначає силу, що відштовхує робота від перешкоди. На цьому етапі дослідження було виявлено дві потенційні функції для моделювання цього поля: гауссова функція та функція Лапласа. Спочатку розглянемо

гауссову функцію. Репульсивне поле генероване перешкодою обчислюється за формулою (6).

$$f_k(\theta_i) = A_k * \exp\left(-\frac{(\theta_k - \theta_i)^2}{2\sigma_k^2}\right), \quad (6)$$

де  $\theta_k$  позначає центральний кут перешкоди,  $\sigma_k$  - половина кута, який охоплює перешкода.

Для спрощення обчислень у роботі використано модель сенсора із роздільною здатністю в 1 градус та діапазоном 360 градусів. Таким чином у векторі даних із сенсора індекс  $i$  відповідає куту вимірювань. Кожен гаусіан відповідає за свою перешкоду і таким чином вносить вклад у сумарне репульсивне поле, або відштовхує робота від всіх перешкод. Коефіцієнт  $A_k$  вибирається таким чином щоб гаусіан повністю охоплював перешкоду та обчислюється за формулою (7).

$$A_k = \bar{d}_k * \exp\left(\frac{1}{2}\right), \quad (7)$$

де  $\bar{d}_k = d_{max} - d_k$ ,  $d_{max}$  - максимальна відстань вимірювань сенсора.

Графік на рис. 4 відображає дані із сенсора відстані. Ці дані будуть використовуватись для подальших симуляцій. Також обрано бажаний напрямок руху  $\theta_{goal} = 45^\circ$ .

Сумарне репульсивне поле обчислюється як сума репульсивних полів генерованих кожною перешкодою (8). Як наслідок – поле є функцією залежною від кута  $\theta$ .

$$f_{rep}(\theta_i) = \sum_{k=1}^n A_k * \exp\left(-\frac{(\theta_k - \theta_i)^2}{2\sigma_k^2}\right) \quad (8)$$

Наступним етапом є обчислення атрактивного поля (9). Це поле описує силу, яка притягує робота у заданому напрямку  $\theta_{goal}$ . Таким чином результуюче поле обчислюється згідно із рівнянням (9) та визначає безпечний напрямок руху робота на поточній ітерації.

$$f_{attr}(\theta_i) = \gamma|\theta_{goal} - \theta_i| \quad (9)$$

$$f_{total}(\theta_i) = f_{attr}(\theta_i) + f_{rep}(\theta_i) \quad (10)$$

$$\theta_{dir} = \operatorname{argmin}(f_{total}) \quad (11)$$

У рівнянні (9) варто звернути увагу на коефіцієнт  $\gamma$ , який задає силу притягання до цілі та не є універсальним. Тобто в існуючих методах його потрібно підбирати під робоче середовище. Якщо значення параметра занадто мале – робот об'їде перешкоду, але шлях буде не оптимальним. А при збільшенні цього значення – шлях стає більш оптимальним, проте зростає ймовірність колізії із перешкодами. Згідні із дослідженням проведеним у статті [4] – оптимальне значення було підбрано експериментально:  $\gamma = 5$ . Автори також стверджують, що це значення оптимальне для більшості робочих середовищ. Проте після проведення симуляцій встановлено, що для поточного робочого середовища оптимальне значення  $\gamma_{gauss} = 0.5$ .



Одним із потенційних покращень може бути динамічний підбір цього параметра. Рівняння (11) описує як вибирається безпечний напрямок руху на поточній ітерації. Графік на рис. 6 демонструє криві, які відповідають кожній із сил: сумарній, атрактивній та репульсивній. Синя крива представляє репульсивне поле, зелена – атрактивне та оранжева – сумарне поле. Останнім кроком є обчислення безпечного напрямку руху згідно із (11): тобто знаходження аргументу функції сумарного поля за якого функція набуває мінімального значення. Згідно із даними симуляції безпечний напрямок руху на поточній ітерації  $\theta = 49^\circ$ .

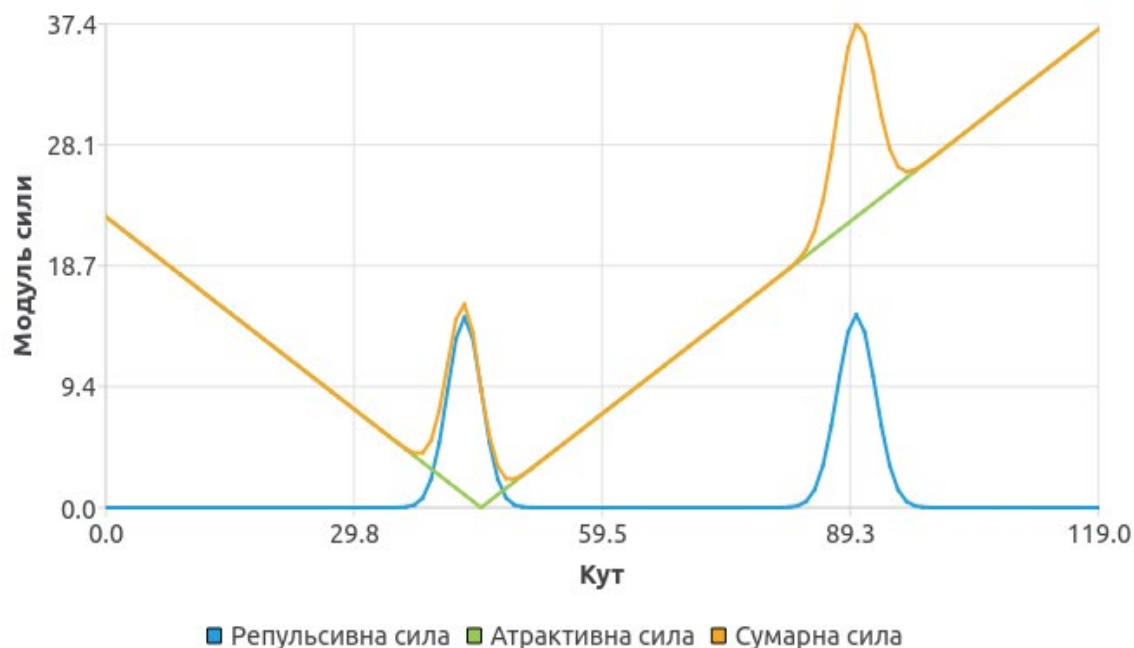


Рис. 6. Результати симуляції для гаусового потенціального поля.

У роботі [4] наведено модифікацію із використанням функції Гауса для опису репульсивної сили. Ще однією модифікацією запропонованого методу штучних потенціальних полів може бути використання інших функцій для опису репульсивного поля. У цій роботі ми пропонуємо використати функцію Лапласа як альтернативу (12).

$$f_k(\theta_i) = A_k * \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\theta_k - \theta_i|}{\sigma}\right), \quad (12)$$

де  $\theta_k$  позначає центральний кут перешкоди,  $\sigma_k$  - половина кута, який охоплює перешкода.

Аналізуючи рівняння (12) робимо висновки, що ця функція простіша для обчислень оскільки не виконує піднесення до квадрату значення в експоненті, а лише операція модуля. Також виведено відповідне значення для параметру масштабування (13).

$$A_k = \bar{d}_k * \exp(\sqrt{2}), \quad (13)$$

де  $\bar{d}_k = d_{max} - d_k$ ,  $d_{max}$  - максимальна відстань вимірювань сенсора.

Наступні кроки залишаються незмінними: обчислити репульсивне поле, атрактивне та сумарне. Знайти безпечний напрямок руху. Параметр  $\gamma$  підібрано експериментально згідно із рівнянням (14).

$$\gamma = 10 * \sqrt[2]{2} * \gamma_{gauss} \quad (14)$$

$$f_{rep}(\theta_i) = \sum_{k=1}^n A_k * \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|\theta_k - \theta_i|}{\sigma}\right) \quad (15)$$

$$f_{attr}(\theta_i) = \gamma|\theta_{goal} - \theta_i| \quad (16)$$

$$f_{total}(\theta_i) = f_{attr}(\theta_i) + f_{rep}(\theta_i) \quad (17)$$

$$\theta_{dir} = \operatorname{argmin}(f_{total}) \quad (18)$$

Симуляція проводилась на тих самих вхідних даних, що і для гаусівського поля. Результати наведено на графіках на рис. 7.

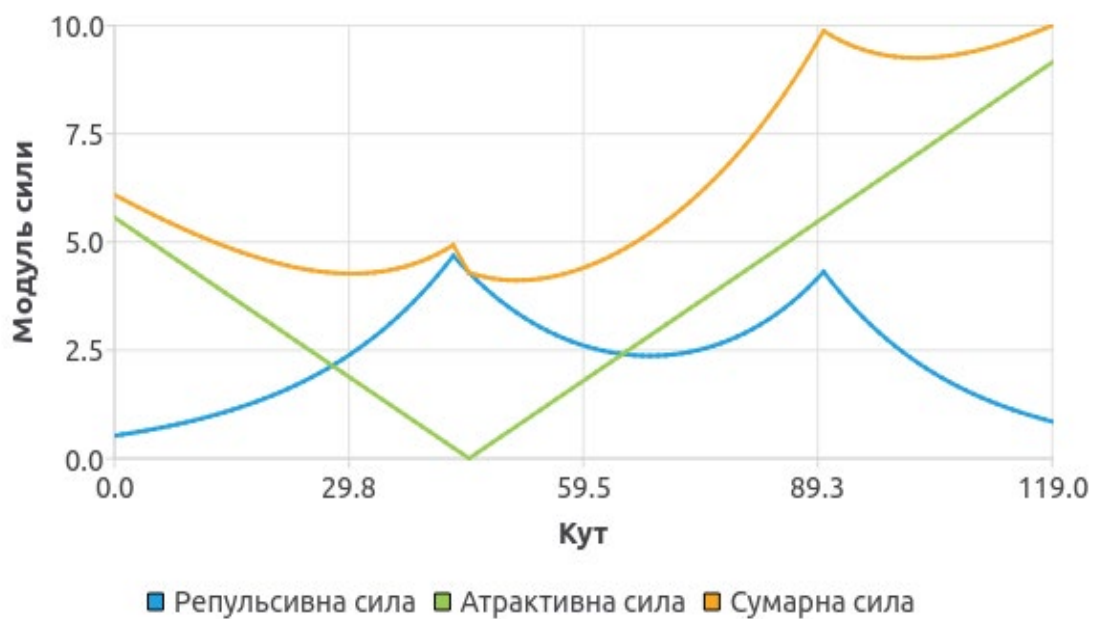


Рис. 7. Результати симуляції для потенціального поля Лапласа.

Безпечний напрямок руху  $\theta = 51^\circ$ , що є доволі близьким до результату попереднього методу.

**Висновки.** У роботі виведено математичну модель нової модифікації алгоритму штучних потенціальних полів. Запропонований підхід здатний мінімізувати проблему локальних мінімумів, проте коефіцієнт  $\gamma$  у атрактивному полі все ще потрібно підбирати під робоче середовище робота. Також запропонований метод повинен краще підходити для систем із обмеженими обчислювальними ресурсами, оскільки містить простіші для обчислень математичні функції у порівнянні із модифікацією із використанням функції Гауса.

Симуляції доводять, що результати запропонованого методу доволі близькі до результатів із використанням функції Гауса. Подальші експерименти із використанням симуляторів під ROS та реальних роботів будуть представлені у наступних статтях. Також у цій роботі ми розглянули лише симетричну функцію для обчислення репульсивного поля. У подальших експериментах заплановано дослідження також асиметричних функцій.

Ще одним напрямком досліджень може бути динамічний або в режимі реального часу підбір коефіцієнта  $\gamma$  для атрактивного поля. Це може знизити ймовірність потрапляння у локальні мінімуми та зробити метод більш стійким до зміни робочого середовища робота: робот зможе у режимі реального часу коригувати та підбирати параметр під поточне робоче середовище.

## References

1. Katona, K.; Neamah, H.A.; Korondi, P. Obstacle Avoidance and Path Planning Methods for Autonomous Navigation of Mobile Robot. *Sensors* 2024, 24, 3573. <https://doi.org/10.3390/s24113573>
2. Bruno Siciliano, Oussama Khatib, "Springer Handbook of Robotics", 2nd Edition, 2016.
3. Xiaojing Fan, Yinjing Guo, Hui Liu, Bowen Wei, Wenhong Lyu. (2020 Apr). Improved Artificial Potential Field Method Applied for AUV Path Planning. *Mathematical Problems in Engineering*. Mathematical Problems in Engineering. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2020/6523158>
4. Jang-Ho Cho, Dong-Sung Pae, Myo-Taeg Lim, Tae-Koo Kang. (2018 Aug). A Real-Time Obstacle Avoidance Method for Autonomous Vehicles Using an Obstacle-Dependent Gaussian Potential Field. *Journal of Advanced Transportation*. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2018/5041401>
5. JF. Duhé, S. Victor, P. Melchior. (2021 May) Contributions on Artificial Potential Field Method for Effective Obstacle Avoidance. *Fract Calc Appl Anal* 24, 421–446 (2021). Available: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0019>
6. He Song, Shaolin Hu, Wenqiang Jiang, Qiliang Guo, Ming Zhu. (2022 Aug). Artificial Potential Field-Based Multi-UAV Formation Control and Target Tracking, *International Journal of Aerospace Engineering*, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2022/4253558>
7. Hao, G.; Lv, Q.; Huang, Z.; Zhao, H.; Chen, W. UAV Path Planning Based on Improved Artificial Potential Field Method. *Aerospace* 2023, 10, 562. <https://doi.org/10.3390/aerospace10060562>
8. Kownacki, C. Artificial Potential Field Based Trajectory Tracking for Quadcopter UAV Moving Targets. *Sensors* 2024, 24, 1343. <https://doi.org/10.3390/s24041343>
9. Sun, Yuan, Fu, Li, "Real-time Game Theory Based Artificial Potential Field Method for Multiple Unmanned Aerial Vehicles Path Planning," Proceedings of the 2018 International Technical Meeting of The Institute of Navigation, Reston, Virginia, January 2018, pp. 521-528. <https://doi.org/10.33012/2018.15583>
10. Li, H., Gong, D. & Yu, J. An obstacles avoidance method for serial manipulator based on reinforcement learning and Artificial Potential Field. *Int J Intell Robot Appl* 5, 186–202 (2021). <https://doi.org/10.1007/s41315-021-00172-5>
11. H. Li, Z. Wang and Y. Ou, "Obstacle Avoidance of Manipulators Based on Improved Artificial Potential Field Method," 2019 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), Dali, China, 2019, pp. 564-569, doi: 10.1109/ROBIO49542.2019.8961506
12. Fang, Z. and Liang, X. (2022), "Intelligent obstacle avoidance path planning method for picking manipulator combined with artificial potential field method", *Industrial Robot*, Vol. 49 No. 5, pp. 835-850. <https://doi.org/10.1108/IR-09-2021-0194>