

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ЗАБРУДНЕННЯ ВАЖКИМИ
МЕТАЛАМИ МЕТОДАМИ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ ЗА ДОПОМОГОЮ
ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ**

Першина Ю.І.^{1,2}. (ORCID: 0000-0002-4719-8195),
Ковтун А.В.²(ORCID: 0009-0008-7438-4373)

¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

²Харківський національний університет радіоелектроніки

**MATHEMATICAL MODELING OF HEAVY METAL POLLUTION
DISTRIBUTION RESULTING FROM EMISSIONS USING INTERLINEATION OF
THREE-VARIABLE FUNCTIONS**

Pershyna I.I.^{1,2}., Kovtun A.V.²

¹ National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

² Kharkiv National University of Radio Electronics

Abstract. The article builds a mathematical model that describes the distribution of heavy metal contamination of soil due to industrial emissions. The input data are experimental data obtained by non-destructive testing methods. To do this, the paper constructs an interlineation operator for a function of three variables based on its known traces on a system of arbitrarily placed parallel lines. The article proves the interlineation properties of the constructed operator and theorems about the form of the error and its estimation.

Keywords: mathematical modeling, heavy metal pollution, interlineation, interpolation, non-destructive testing

Вступ. Математичне моделювання забруднення ґрунту важкими металами [1] є актуальним, особливо у сучасних умовах, та здійснюється на основі аналізу джерел викидів, зокрема промислових підприємств. Основними факторами є обсяг і склад забруднюючих речовин, що потрапляють у навколишнє середовище, атмосферні процеси їхнього переносу, а також хімічні та фізичні взаємодії із ґрунтовим покривом.

По-перше, таке забруднення впливає на здоров'я людини. Накопичення в харчовому ланцюгу: важкі метали, такі як свинець (Pb), кадмій (Cd) [2], ртуть (Hg), миш'як (As), хром (Cr), мідь (Cu) та цинк (Zn), накопичуються в ґрунті і легко поглинаються рослинами. Це призводить до їх потрапляння в сільськогосподарську продукцію (овочі, фрукти, зернові), а потім у корм для тварин та, зрештою, у продукти харчування людини (м'ясо, молоко). Навіть у малих концентраціях важкі метали є токсичними і можуть спричиняти широкий спектр захворювань: порушення функціонування нирок, печінки, нервової та серцево-судинної систем, анемію, алергії, проблеми з розвитком у дітей, а також підвищувати ризик онкологічних захворювань. Деякі з них можуть залишатися в організмі десятиліттями.

По-друге, таке забруднення впливає на сільськогосподарську продуктивність та екосистеми. Зниження родючості ґрунту: важкі метали негативно впливають на мікрофлору ґрунту, що відповідає за його родючість, знижуючи її активність та руйнуючи структуру ґрунту. Це призводить до деградації земель та зменшення врожайності сільськогосподарських культур. Забруднення ґрунту важкими металами порушує природні екосистеми, впливає на біорізноманіття, знижує здатність ґрунту до самовідновлення. Процеси забруднення та деградації ґрунту можуть стати незворотними, що має довгострокові наслідки для сільського господарства та довкілля.

Джерела забруднення та їх розширення:

- Металургія (чорна та кольорова), хімічна промисловість, енергетика є основними джерелами викидів важких металів у ґрунт.
- Автомобільний, авіаційний та залізничний транспорт також значно сприяють забрудненню ґрунтів вздовж транспортних магістралей [3].
- Неправильне використання мінеральних добрив та пестицидів, а також зрошувальні води, забруднені промисловими стоками, є додатковими джерелами забруднення.
- Звалища та інші місця зберігання промислових і побутових відходів є постійними джерелами надходження важких металів у ґрунт і ґрунтові води.

Сучасна повномасштабна війна в Україні суттєво посилила проблему [4]. Кожен снаряд, міна чи авіабомба, що застосовуються на територіях бойових дій, є джерелом важких металів, які потрапляють у ґрунт. Це призводить до значного забруднення великих площ, особливо орних земель, що раніше використовувалися для сільськогосподарського виробництва.

Тобто проблема забруднення ґрунту важкими металами є глобальною, але для України вона набула особливої гостроти через тривалі військові дії. Це створює пряму загрозу для здоров'я населення, сільськогосподарської продуктивності та довкілля в цілому. Дослідження, моніторинг, розробка та впровадження ефективних методів очищення та рекультиваци забруднених ґрунтів є критично важливими для забезпечення екологічної безпеки та продовольчої стабільності.

Вимірювання забруднення ґрунту важкими металами на глибині методом неруйнівного контролю є дуже складним завданням [5], і наразі не існує універсального приладу чи методу, який би дозволяв точно та безпосередньо вимірювати концентрації важких металів у ґрунті на значній глибині без відбору проб. Однак, існують геофізичні методи, які непрямо можуть вказувати на наявність забруднення важкими металами, вимірюючи фізичні властивості ґрунту, що змінюються під впливом металів. Ці методи є неруйнівними і дозволяють отримати просторові дані про можливе забруднення на певній глибині. Вони частіше використовуються для попереднього скринінгу, картування потенційно забруднених ділянок та визначення зон для детального відбору проб, а не для точного кількісного визначення концентрацій.

Метою роботи є побудова математичної моделі розподілу забруднення ґрунту важкими металами на основі відомих слідів функції на заданій системі прямих, які отримуються за допомогою дистанційних методів дослідження.

При використанні таких експериментальних даних ми стикаємося з двома головними проблемами, які ускладнюють нашу роботу:

1. Дані "розкидані" випадковим чином, тобто точки, де беруться проби ґрунту, не розташовані рівномірно на поверхні. ускладнює використання класичних методів математичного моделювання.
2. Кількість забруднюючих речовин у ґрунті змінюється "стрибками" [6] в певних місцях. Це відбувається там, де змінюється структура ґрунту. Через ці раптові зміни ми не можемо використовувати складні математичні методи, що ґрунтуються на "гладкості" функцій, щоб оцінити, наскільки точно наша модель відображає реальність.

Таким чином, нам потрібно розробляти або адаптувати спеціальні методи моделювання, які можуть впоратися з такими даними та раптовими змінами в концентрації забруднення. Для обробки даних дистанційними методами дослідження природно використовувати методи інтерполяції функцій [7], оскільки вони використовують для своєї побудови сліди функцій вздовж заданої системи ліній та мають вищу точність.

Методологія дослідження. Постановка задачі. Нехай невідома функція $u = f(x, y, z)$ описує просторовий розподіл забруднення ґрунту важкими металами. Експериментальні дані містять інформацію про концентрації важких металів у різних точках досліджуваної території: $G_n : (X_n, Y_n, z)$; $X_n, Y_n \in E$, $E = [0, 1]$; $0 \leq z \leq H$, $n = \overline{1, N}$ та функцій $f_n(z)$, $n = \overline{1, N}$, що описують вертикальний розподіл забруднюючих речовин у ґрунтовому шарі залежно від глибини z .

Таким чином, відомими є наступні дані: набір прямих G_n , $n = \overline{1, N}$; сліди функції на цих прямих, яка є невідомою $f_n(z) = f(X_n, Y_n, z)$, $n = \overline{1, N}$, $f(x, y, z) \in C^r(E^2)$, $r \geq 0$. Тобто, у даній роботі припускається, що кожній свердловині ставиться у відповідність не одне число, а одна функція – характеристика розподілу щільності забруднення ґрунту важкими металами.

Метою роботи є побудова математичної моделі розподілу забруднення ґрунту на основі відомих слідів функції на заданій системі прямих $L(x, y, z)$ з властивостями: $L(X_j, Y_j, z) = f_j(z)$, $j = \overline{1, N}$.

При використанні таких експериментальних даних ми стикаємося з двома головними проблемами, які ускладнюють нашу роботу:

3. Дані "розкидані" випадковим чином, тобто точки, де беруться проби ґрунту, не розташовані рівномірно на поверхні. ускладнює використання класичних методів математичного моделювання.
4. Кількість забруднюючих речовин у ґрунті змінюється "стрибками" в певних місцях. Це відбувається там, де змінюється структура ґрунту. Через ці раптові зміни ми не можемо використовувати складні математичні методи, що ґрунтуються на "гладкості" функцій, щоб оцінити, наскільки точно наша модель відображає реальність.

Таким чином, нам потрібно розробляти або адаптувати спеціальні методи моделювання, які можуть впоратися з такими даними та раптовими змінами в концентрації забруднення.

Теорема 1. Якщо $f_k(z) \in C(E)$, $k = \overline{1, N}$, то оператор

$$Lf(x, y, z) = \sum_{n=1}^N f_n(z) O_n(x, y) \quad (1)$$

$$O_n(x, y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \frac{\rho(P, P_i)^q}{\rho(P_n, P_i)^q}, \quad (2)$$

$$P = (x, y), \quad \rho(P_n, P_i) = \sqrt{(X_n - X_i)^2 + (Y_n - Y_i)^2}, \quad q > 0$$

є оператором інтерлінації та задовольняє властивостям

$$Lf(x, y, z) \in C(R^3); \quad Lf(X_k, Y_k, z) = f_k(z), \quad k = \overline{1, N}.$$

Доведення. Враховуючи наступні властивості допоміжної функції $O_n(x, y)$

$$O_n(x, y) \geq 0, \quad O_n(x, y) \in C(R^2), \quad O_n(X_k, Y_k) = \delta_{n,k}, \quad n, k = \overline{1, N}$$

можна зробити висновок, що $Lf(x, y, z) \in C(R^3)$.

Для доведення другого твердження теореми 1 напишемо наступну послідовність рівностей

$$Lf((X_k, Y_k, z) = \sum_{n=1}^N f_n(z) O_n(X_k, Y_k) = \sum_{n=1}^N f_n(z) \delta_{k,n} = f_k(x) \delta_{k,k} = f_k(x).$$

Таким чином, теорема 1 доведена.

Визначимо залишок наближення функції побудованим оператором інтерлінації.

Теорема 2. Для залишку $Rf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z)$ наближення функції $f(x, y, z)$ оператором інтерлінації $Lf(x, y, z)$ виконується наступне інтегральне зображення:

$$Rf(x, y) = \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 \frac{\partial f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z)}{\partial t} dt \right) \cdot O_n(x, y), \quad \forall f \in C^1(E)$$

Доведення. Нехай $f \in C^1(E)$, тобто функція має неперервні частинні похідні першого порядку. Введемо допоміжну функцію:

$$\varphi_n(t) := f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z), \quad t \in [0, 1]$$

Очевидно що:

$$\varphi_n(0) = f(x_n, y_n, z), \quad \varphi_n(1) = f(x, y, z),$$

Згідно з формулою Ньютона-Лейбніца:

$$f(x_n, y_n, z) - f(x, y, z) = \varphi_n(1) - \varphi_n(0) = \int_0^1 \varphi'_n(t) dt$$

де похідна по t обчислюється за правилом ланцюгових похідних:

$$\varphi'_n(t) = \frac{d}{dt} f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_n) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - y_n),$$

в усіх точках траєкторії, тобто $(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z) \in E$

Тоді отримаємо:

$$f(x, y, z) = f(x_n, y_n, z) + \int_0^1 \frac{\partial f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z)}{\partial t} dt$$

Помножимо обидві частини рівності на $O_n(x, y)$ і просумуємо за всіма $n = 1, \dots, N$, враховуючи що:

$$Lf(x, y, z) = \sum_{n=1}^N f_n(x) \cdot O_n(x, y),$$

використовуючи лінійність операторів та визначення O_n , отримаємо:

$$f(x, y, z) = \sum_{n=1}^N f_n(z) \cdot O_n(x, y) + \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 \frac{\partial f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z)}{\partial t} dt \right) \cdot O_n(x, y).$$

Таким чином:

$$Rf(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 \frac{\partial f(x_n + t(x - x_n), y_n + t(y - y_n), z)}{\partial t} dt \right) \cdot O_n(x, y)$$

Що й треба було довести.

Теорема 3. Для залишку $Rf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z)$ наближення функції $f(x, y, z)$ оператором інтерлінації $Lf(x, y, z)$ виконується дійсна наступна оцінка

$$|Rf(x, y, z)| \leq C \sum_{n=1}^M (|x - x_n| + |y - y_n|) O_n(x, y), \quad \forall f \in C^1(E \times [0, H]),$$

$$C = \max_{(x,y) \in E, 0 \leq z \leq H} \left(\left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \right| \right)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2:

$$Rf(x,y,z) = \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial t} dt \right) \cdot O_n(x,y)$$

Використаємо правило ланцюгових похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial x} (x-x_n) + \\ &+ \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial y} (y-y_n), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} |Rf(x,y,z)| &\leq \sum_{n=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial x} (x-x_n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial y} (y-y_n) \right| dt \cdot |O_n(x,y)|. \end{aligned}$$

За нерівністю трикутника:

$$\begin{aligned} |Rf(x,y,z)| &\leq \sum_{n=1}^N \int_0^1 \left(\left| \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial x} \right| |x-x_n| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial y} \right| |y-y_n| \right) dt \cdot O_n(x,y). \end{aligned}$$

Оскільки $f \in C^1$, то похідні обмежені, тобто існує константа C , така що:

$$\left| \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f(x_n + t(x-x_n), y_n + t(y-y_n), z)}{\partial y} \right| \leq C$$

для всіх $t \in [0,1]$. Тоді

$$|Rf(x,y,z)| \leq C \sum_{n=1}^N (|x-x_n| + |y-y_n|) O_n(x,y)$$

що й треба було довести.

Таким чином, максимальна величина похибки значною мірою залежить від розташування прямих інтерлінації $G_n, n = \overline{1, N}$, та оцінюється за допомогою відповідної функції

$$\Psi(x,y,z) = \sum_{n=1}^N (|x-x_n| + |y-y_n|) L_n(x,y), \quad \forall (x,y,z) \in (D \times [0,H])$$

Оператор $L(x,y,z)$ представляє математичну модель розподілу забруднення ґрунту важкими металами. В подальшій роботі планується модифікувати розроблену модель з суттєвим врахуванням неоднорідності ґрунту.

Враховуючи, що знаменники у формулі (2) є постійними, можна зробити висновок, що (1) є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x, y , лише якщо $\lambda = 2p, p \in \mathbb{N}$.

Базисні функції $O_n(x,y)$ є базисними функціями і також функціями координат точок $P_k(X_k, Y_k), k = \overline{1, N}$:

$$O_n(x, y) = O_n(x, y; X, Y)$$

і, залежать від розміщення цих координат на площині.

Використання формули для $Lf(x, y, z)$ з допоміжними функціями (2) може призвести до різких змін між точками $P_k(X_k, Y_k)$, оскільки чисельник є необмеженою величиною. Це пояснюється тим, що оператори $Lf(x, y, z)$ є узагальненнями поліноміальних інтерполяційних операторів Лагранжа для випадків нерегулярно розміщених вузлів. Хоча теореми Вейерштрасса стверджують, що будь-яку неперервну функцію на замкненому інтервалі можна наблизити алгебраїчним поліномом деякого степеня n з заданою точністю. Але інтерполяційні поліноми Лагранжа збігаються не для кожної неперервної функції. Наприклад, доведено, що інтерполяційний поліном Лагранжа з рівномірно розміщеними вузлами на інтервалі $[-1, 1]$ не збігається до функції $f(x) = |x|$. Тому, далі будуть розглянуті інші формули для допоміжних функцій.

Теорема 4. Якщо у формулі для $Lf(x, y, z)$ в якості допоміжних (базисних) функцій взяти вирази вигляду

$$O_n(x, y) = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^N ((x - X_i)(X_k - X_i) + (y - Y_i)(Y_k - Y_i))^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M ((X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2)^\lambda}, \quad (3)$$

то функція $Lf(x, y, z)$ є інтерлінаційним поліномом, якщо $\lambda \in \mathbb{N}$, для якого виконується умова $Lf(X_k, Y_k, z) = \overline{f_k(z)}, k = \overline{1, N}$.

Доведення. Відмітимо, що (3) є поліномом степеня $(N-1)q$ за змінними x, y , якщо $q \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що для $Lf(x, y, z)$ виконуються інтерлінаційні властивості.

$$O_n(X_p, Y_p) = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M ((X_p - X_i)(X_k - X_i) + (Y_p - Y_i)(Y_k - Y_i))^q}{\prod_{i=1, i \neq k}^M ((X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2)^q} = \delta_{p,k}.$$

Якщо повторити викладки з теореми 1, отримаємо

$$Lf(X_p, Y_p, z) = \overline{f_p(z)}, p = \overline{1, N}$$

Теорема 4 доведена.

Якщо ж q є раціональним числом $q = \frac{m}{n}$, то функції $O_n(x, y)$ можуть приймати дійсні значення лише при умовах $m \in \mathbb{R}, n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$, оскільки вираз $(x - X_i)(X_k - X_i) + (y - Y_i)(Y_k - Y_i)$ може бути як додатним так і від'ємним.

Якщо у формулі для $Lf(x, y, z)$ покласти

$$O_n(x, y) = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M |(x - X_i)(X_k - X_i) + (y - Y_i)(Y_k - Y_i)|^q}{\prod_{i=1, i \neq k}^M ((X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2)^q},$$

то оператор $Lf(x, y, z)$ теж буде оператором інтерлінації, якщо $q > 0$ і

$$Lf(X_k, Y_k, z) = f_k(z).$$

Результати дослідження та їхнє обговорення. Формула для операторів $L_N(\{G_n\})f(x, y, z)$ при фіксованих значеннях змінної z , $0 \leq z \leq H$ є глобальною інтерполяційною формулою Шепарда за умови, що $q = 1$. Вона була досліджена в роботах [8]. Варто зазначити, що багатоточкова формула Тейлора, запропонована В.Л. Рвачовим [9], фактично є формулою Шепарда при $q = 1$. Наведемо нижче деякі твердження щодо швидкості збіжності операторів інтерлінації $Lf(x, y, z)$ функцій трьох змінних, які значною мірою спираються на відомі властивості глобальної формули Шепарда.

1. Лінійний оператор інтерлінації $L_N(\{G_n\})f(x, y, z)$ є стійким, тобто

$$\min_{1 \leq i \leq N} f(x_i, y_i, z) \leq Lf(x, y, z) \leq \max_{1 \leq i \leq N} f(x_i, y_i, z), \quad \forall z \quad 0 \leq z \leq H$$

2. Оператор Lf є оптимальним серед усіх "універсально" стійких раціональних інтерполяційних операторів. Однак, для стійких операторів інтерполяції існує обмеження на максимальний порядок апроксимації, який не може перевищувати $N^{-1/n}$, де n – розмірність простору R^n [14]. Це твердження справедливе також і для Lf при кожному фіксованому z .

З отриманих результатів випливає, що оператори $L_N(\{G_n\})f$ (Як додатні оператори) характеризуються невисокою точністю. Проте в роботі [15] доведено, що інтерполяційні оператори Шепарда для функції однієї змінної зберігають її глобальну гладкість f . З огляду на важливу роль операторів, які зберігають певні властивості наближуваної функції f , У деяких задачах (зокрема, у досліджуваній у цій роботі) низька точність операторів $L_N(\{G_n\})f$ може бути не дуже відчутною.

Висновки. У статті побудовано математичну модель, яка описує розподіл забруднення ґрунту важкими металами внаслідок промислових викидів. Вхідними даними є експериментальні дані, отримані методами неруйнівного контролю. Для цього статті побудовано оператор інтерлінації для функції трьох змінних на основі її відомих слідів на системі довільно розміщених паралельних прямих. В подальшому авторами планується провести чисельний експеримент, використовуючи побудовану модель та побудувати математичну модель забрудненості ґрунту важкими металами, суттєво використовуючи неоднорідність розподілення забруднення в ґрунті.

Бібліографія

1. Балюк С.А., Медведєв В.В., Мірошніченко М.М., Скрильник Є.В., Тимченко Д.О., Фатєєв А.І., А.О. Христенко, Цапко Ю.Л. Екологічний стан ґрунтів України. // Український географічний журнал. - 2012. - № 2. – С. 38-42
2. Жеребна Л.О. Вплив високих рівнів забруднення свинцем і кадмієм чорноземів опідзолених і типових на надходження цих елементів у рослини ячменю та кукурудзи : Автореф. дис. ... канд. біол. наук. — Харків, 2003.
3. Рошко В.Г., Грабовський О.В. Оцінка забруднення важкими металами агроценозів, межуючих з автомагістралями // Вісник УжНУ, серія Біологія, № 6, 1999. – С. 259-262.
4. Твердохлебова Н. Є. , Євтушенко Н.С. Регіональна екологічна безпека в умовах воєнного стану // Сучасні технології у промисловому виробництві : матеріали та програма 10-ї Всеукр. наук.-техн. конф., 18-21 квітня 2023 р. / відп. ред. О. Г. Гусак ; Сум. держ. ун-т Суми : СумДУ, 2023. С. 177-178.
5. Гічка М. М. Дистанційне зондування в системі моніторингу ґрунтів України / Вісник аграрної науки : Науково-теоретичний журнал Української Академії аграрних наук, 2005. - №12. С. 72-75
6. Pershyna I. I. Restoration of discontinuous functions by discontinuous interlineation splines. – Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя, 2022. – № 4. С. 29 – 39.
7. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O.M. Interlineation of Functions. // in Springer book: Elements of the General Theory of Optimal Algorithms, 2021. – P.75 – 176
8. Литвин О.М. Методи обчислень: Додаткові розділи. – К.: Наук. думка, 2005. – 331 с
9. Литвин О.Н. Формула Тейлора і Даламбера. Інтерлінація функцій. Методика вивчення. Рекомендації викладачам та студентам. Київ: УМК ВО, 1990. – 48 с.

References

1. Balyuk S.A., Medvedev V.V., Miroshnychenko M.M., Skrylnyk E.V., Tymchenko D.O., Fateyev A.I., A.O. Khrystenko, Tsapko Y.L. Ecological state of soils of Ukraine. // Ukrainian Geographical Journal. - 2012. - No. 2. - P. 38-42
2. Zhrebna L.O. The influence of high levels of lead and cadmium contamination of podzolized and typical chernozems on the intake of these elements in barley and corn plants: Abstract of dissertation ... candidate of biological sciences - Kharkiv, 2003.
3. Roshko V.G., Grabovsky O.V. Assessment of heavy metal contamination of agrocenoses bordering highways // Bulletin of UzhNU, Biology series, No. 6, 1999. – P. 259-262.
4. Tverdokhlebova N. E., Yevtushenko N. S. Regional ecological safety in martial law conditions // Modern technologies in industrial production: materials and program of the 10th All-Ukrainian scientific and technical conference, April 18-21, 2023 / deputy editor O. G. Husak; Sumy State University of Sumy: SumDU, 2023. P. 177-178.
5. Gichka M. M. Remote sensing in the soil monitoring system of Ukraine / Bulletin of Agrarian Science: Scientific and Theoretical Journal of the Ukrainian Academy of Agrarian Sciences, 2005. - No. 12. P. 72-75
6. Pershyna I. I. Restoration of discontinuous functions by discontinuous interlineation splines. – Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя, 2022. – № 4. С. 29 – 39.
7. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O.M. Interlineation of Functions. // in Springer book: Elements of the General Theory of Optimal Algorithms, 2021. – P.75 – 176
8. Lytvyn O.M. Calculation Methods: Additional Sections. – Kyiv: Nauk. Dumka, 2005. – 331 p.
9. Lytvyn O.N. Taylor and d'Alembert formula. Interpolation of functions. Study methodology. Recommendations for teachers and students. Kyiv: UMC VO, 1990. – 48 p.