

ВИКОРИСТАННЯ СФЕРИЧНИХ ГАРМОНІК ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ КВАЗІКРИСТАЛІВ

Вікторія Пастернак, Віталій Козелко

APPLICATION OF SPHERICAL HARMONICS FOR COMPUTING FUNDAMENTAL
SOLUTIONS OF 3D STATIC THERMOELASTIC PROBLEMS IN QUASICRYSTALS

Viktoriia Pasternak, Vitaliy Kozelko

Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, Луцьк, 43025,
Україна

Abstract. *This paper explores the use of spherical harmonics for computing fundamental solutions of three-dimensional static thermoelastic problems in quasicrystals. Quasicrystals are complex anisotropic materials with unique thermo-mechanical behavior, requiring advanced modeling approaches. The fundamental solution serves as a key component in solving boundary value problems for such media. The Radon transform is employed to reduce the governing equations to a more manageable form. Its inverse, expressed as an integral over a hemisphere, is efficiently evaluated by expanding the integrand in spherical harmonics. The first harmonic represents the isotropic response, while higher-order terms capture anisotropic effects. This approach ensures fast convergence and enables semi-analytical representation of solutions. The proposed method enhances both the accuracy and computational efficiency of modeling thermoelastic behavior in quasicrystalline materials.*

Квазікристали – це особливий клас матеріалів з квазіперіодичною структурою. Вони мають унікальні фізико-механічні властивості. Такі матеріали поєднують властивості кристалів та аморфних тіл. Вони демонструють високу міцність, термостійкість та стійкість до корозії. Саме тому квазікристали мають перспективу для застосування в аерокосмічній техніці. Вони також використовуються в енергетиці та медицині. Ще один напрям – захисні покриття та новітні сенсорні пристрої. Для подальшого розвитку необхідно створювати точні моделі їхньої поведінки. Одним з актуальних завдань є моделювання термопружності квазікристалів. Це складна задача, адже такі матеріали є анізотропними. Крім того, квазікристали мають додаткові внутрішні ступені свободи. Їх описують фазонні й фононні поля. Тому математична модель повинна враховувати зв'язок між механічними і тепловими величинами.

Побудова фундаментальних розв'язків для таких моделей є складною. У випадку ізотропного середовища ці розв'язки відомі у класичному вигляді. Для анізотропних матеріалів, а тим більше для квазікристалів, вони мають складну структуру. Ефективним підходом для їх побудови є використання інтегральних перетворень. Одне з них – це перетворення Радона [1]. Воно дозволяє перейти від диференціальних рівнянь до інтегральних. У випадку термопружності квазікристалів це дає можливість побудувати загальну схему для розв'язання. Фундаментальний розв'язок (ФР) є ключовим елементом для подальшого аналізу задач термопружності. Обернене перетворення Радона дозволяє відновити ФР у просторі. Для термопружної задачі воно зводиться до обчислення інтегралу по півсфері.

Обчислення цього інтегралу є основним обчислювальним викликом. Пряме числове інтегрування є затратним. Більш ефективним підходом є розклад підінтегрального виразу у

ряд за сферичними гармоніками [2]. Сферичні гармоніки – це функціональний базис на сфері. Вони дозволяють подати будь-яку кутову залежність у вигляді ряду. У контексті термопружності квазікристалів це дає зручне представлення ФР. Перший член ряду (перша гармоніка) відповідає ізотропному середовищу. Наступні гармоніки описують вплив анізотропії. Таким чином, розклад дає фізичну інтерпретацію структури розв'язку.

Цей підхід дозволяє отримати напіваналітичні вирази для ФР. Замість чисельного інтегрування на кожному кроці, достатньо обчислити коефіцієнти гармонік. Вони залежать від напрямку анізотропії та матеріальних констант. Обчислення таких коефіцієнтів є технічно складним, але добре формалізованим. У багатьох випадках ряд швидко збігається. Це означає, що достатньо лише кількох гармонік для точного наближення. Така збіжність дозволяє суттєво зменшити обсяг обчислень. У результаті фундаментальний розв'язок отримується у вигляді ряду з фізичним змістом кожного з його членів. Це зручно як для теоретичного аналізу, так і для числової реалізації.

Метод сферичних гармонік добре масштабується для різних типів симетрії. Він може бути адаптований до гексагональних, пентагональних або тетрагональних квазікристалів. Такий підхід також враховує взаємодію теплових і механічних ефектів. Це особливо важливо при аналізі локалізованого нагріву або теплового розширення. Сферичні гармоніки дають змогу подати відповідь системи на точкове теплове джерело.

Одержані фундаментальні розв'язки можна використовувати в методі граничних елементів. Вони є ядром для побудови інтегральних рівнянь. Такий підхід особливо ефективний для тіл складної форми. Завдяки сферичним гармонікам інтеграли в таких рівняннях мають аналітичну частину. Це підвищує точність і швидкість розв'язання. Фізичне трактування кожного члена гармонічного ряду також є корисним. Воно дає змогу виявити домінуючі механізми деформації. Наприклад, у квазікристалах часто спостерігається сильний вплив фазонної деформації. Це проявляється в гармоніках вищих порядків.

Отже, використання сферичних гармонік у поєднанні з перетворенням Радона є перспективним. Такий підхід дозволяє ефективно обчислювати фундаментальні розв'язки термопружних задач. Він забезпечує гнучкість, точність і фізичну інтерпретацію. Особливо це важливо для складних анізотропних матеріалів, до яких належать квазікристали. З огляду на зростаючий інтерес до них у промисловості, подальший розвиток таких методів є актуальним. Напіваналітичні рішення на основі гармонік можуть бути інтегровані в інженерне програмне забезпечення. Це відкриває можливість для практичного використання складних моделей термопружності.

Бібліографія

1. Deans S.R. The Radon transform and some of its applications. New York: Wiley-Interscience Publication, 1983.
2. Freedman W., Schreiner M. Spherical Functions of Mathematical Geosciences. New York: Springer Nature, 2022.