

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ЗАБРУДНЕННЯ ВАЖКИМИ
МЕТАЛАМИ МЕТОДАМИ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ ЗА ДОПОМОГОЮ
ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ**

Юлія Першина^{1,2}, Артем Ковтун²

**MATHEMATICAL MODELING OF THE DISTRIBUTION OF HEAVY METALS
POLLUTION BY NON-DESTRUCTIVE TESTING METHODS USING INTERLINATION OF
THREE-VARIABLE FUNCTIONS**

Iuliia Pershyna, Artem Kovtun

¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Кирпичова, 2, 61002, м. Харків, Україна

²Харківський національний університет радіоелектроніки, просп. Науки, 14, 61166,
м. Харків, Україна

Abstract. The article builds a mathematical model that describes the distribution of heavy metal contamination of soil due to industrial emissions. The input data are experimental data obtained by non-destructive testing methods. To do this, the paper constructs an interlineation operator for a function of three variables based on its known traces on a system of arbitrarily placed parallel lines.

Математичне моделювання забруднення ґрунту важкими металами є актуальним та здійснюється на основі аналізу джерел викидів, зокрема промислових підприємств. Основними факторами є обсяг і склад забруднюючих речовин, що потрапляють у навколишнє середовище, атмосферні процеси їхнього переносу, а також хімічні та фізичні взаємодії із ґрунтовим покривом.

Вимірювання забруднення ґрунту важкими металами на глибині методом неруйнівного контролю є актуальним та дуже складним завданням, і наразі не існує універсального приладу чи методу, який би дозволяв точно та безпосередньо вимірювати концентрації важких металів у ґрунті на значній глибині без відбору проб. Однак, існують геофізичні методи, які непрямо можуть вказувати на наявність забруднення важкими металами.

Постановка задачі. Нехай невідома функція $u = f(x, y, z)$ описує просторовий розподіл забруднення ґрунту важкими металами. Експериментальні дані містять інформацію про концентрації важких металів у різних точках досліджуваної території: $G_n : (X_n, Y_n, z)$; $X_n, Y_n \in E$, $E = [0, 1]$; $0 \leq z \leq H$, $n = \overline{1, N}$ та функцій $f_n(z)$, $n = \overline{1, N}$, що описують вертикальний розподіл забруднюючих речовин у ґрунтовому шарі залежно від глибини z .

Таким чином, відомими є наступні дані: набір прямих G_n , $n = \overline{1, N}$; сліди функції на цих прямих, яка є невідомою $f_n(z) = f(X_n, Y_n, z)$, $n = \overline{1, N}$, $f(x, y, z) \in C^r(E^2)$, $r \geq 0$. Тобто, у даній роботі припускається, що кожній свердловині ставиться у відповідність не одне число, а одна функція – характеристика розподілу щільності забруднення ґрунту важкими металами.

Метою роботи є побудова математичної моделі розподілу забруднення ґрунту на основі відомих слідів функції на заданій системі прямих $L(x, y, z)$ з властивостями:

$$L(X_j, Y_j, z) = f_j(z), \quad j = \overline{1, N}.$$

При використанні таких експериментальних даних ми стикаємося з двома головними проблемами, які ускладнюють нашу роботу:

1. Дані "розкидані" випадковим чином, тобто точки, де беруться проби ґрунту, не розташовані рівномірно на поверхні. ускладнює використання класичних методів математичного моделювання.
2. Кількість забруднюючих речовин у ґрунті змінюється "стрибками" в певних місцях. Це відбувається там, де змінюється структура ґрунту. Через ці раптові зміни ми не можемо використовувати складні математичні методи, що ґрунтуються на "гладкості" функцій, щоб оцінити, наскільки точно наша модель відображає реальність.

Таким чином, нам потрібно розробляти або адаптувати спеціальні методи моделювання, які можуть впоратися з такими даними та раптовими змінами в концентрації забруднення.

Теорема 1. Якщо $f_k(z) \in C(E), k = \overline{1, N}$, то оператор

$$L(x, y, z) = \frac{\sum_{n=1}^N f_n(z) O_n(x, y)}{\sum_{n=1}^N O_n(x, y)}$$

$$O_n(x, y) = \sum_{i=1, i \neq n}^N \frac{\rho(P, P_i)^q}{\rho(P_n, P_i)^q}, \quad P = (x, y), \quad \rho(P_n, P_i) = \sqrt{(X_n - X_i)^2 + (Y_n - Y_i)^2}$$

є оператором інтерлінації та задовольняє властивостям

$$L(x, y, z) \in C(R^3); \quad L(X_k, Y_k, z) = f_k(z), \quad k = \overline{1, N}.$$

Теорема 2. Для залишку $Rf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z)$ наближення функції $f(x, y, z)$ оператором інтерлінації $L(x, y, z)$ виконується співвідношення

$$|Rf(x, y, z)| \leq C \sum_{n=1}^M (|x - x_n| + |y - y_n|) L_n(x, y), \quad \forall f \in C^1(D \times [0, H]),$$

$$C = \max_{(x, y) \in D, 0 \leq z \leq H} \left(\left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| \right)$$

Таким чином, максимальна величина похибки значною мірою залежить від розташування прямих інтерлінації $G_n, n = \overline{1, N}$, та оцінюється за допомогою відповідної функції

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{n=1}^N (|x - x_n| + |y - y_n|) L_n(x, y), \quad \forall (x, y, z) \in (D \times [0, H])$$

Оператор $L(x, y, z)$ представляє математичну модель розподілу забруднення ґрунту важкими металами. В подальшій роботі планується модифікувати розроблену модель з суттєвим врахуванням неоднорідності ґрунту.

Бібліографія

1. Alloway B. J. Sources of Heavy Metals and Metalloids in Soils. Springer, 2013. 615p.
2. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544 с.