

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НИТКОВИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ В АНІЗОТРОПНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ТІЛАХ

Андрій Корнійчук, Ярослав Пастернак

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF THREAD-LIKE INHOMOGENEITIES IN ANISOTROPIC THERMOELASTIC SOLIDS

Andrii Korniiichuk, Iaroslav Pasternak

Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, Луцьк, 43025, Україна

Abstract. This study presents a robust numerical approach for analyzing thermoelastic anisotropic solids containing thin thread-like inhomogeneities. The specific features of applying the integral equation method to such inhomogeneities are examined. A solid boundary element technique is developed to handle 3D ill-posed boundary-value problems with boundary conditions defined along spatial curves. Mathematical models for thermoelastic anisotropic thread-like inhomogeneities are constructed, and several numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Останнім часом зростає зацікавленість дослідників у математичному моделюванні структурно-неоднорідних тіл, зокрема, волокнистих композитних матеріалів [1]. Тут важливо враховувати не тільки зумовлену різницею розмірів волокон у різних напрямках анізотропію утвореного композиту, а й анізотропні властивості матеріалу матриці. Для ниткових неоднорідностей з'ясовано [2], що перенесення контактних умов на просторову криву, що збігається з серединною лінією включення, дозволяє знизити розмірність задачі та звести її до одновимірних інтегральних рівнянь термопружності [2]. Проте отримана крайова задача є погано обумовленою, її доводиться регуляризувати [2], що дало змогу отримати аналітико-числові розв'язки для ізотропного середовища з прямолінійним нитковим включенням. Для практичного застосування важливі також універсальні числові методи розв'язування задач анізотропної термопружності тіл із поодинокими чи груповими нитковими неоднорідностями довільної форми. У цьому дослідженні запропоновано підхід на основі методу граничних елементів.

Розглянемо рівняння теплопровідності тіла із нитковою неоднорідністю [3]:

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x}_0) \left[\int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \right] = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (1)$$

де $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ – функція Гріна просторової задачі теплопровідності [4]; $\gamma(\mathbf{x})$ – шукана функція; $B(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x})$; $\theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0))$ – модель ниткової неоднорідності; L_ε – регуляризаційний контур малого радіусу ε довкола точки $\mathbf{x}_0$.

Введемо вагову функцію

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \varepsilon, \\ \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{\varepsilon}, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Тоді

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) = \int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}_0), \quad (3)$$

$$\text{де } C(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL.$$

Таким чином, використавши (3) отримаємо на основі (1) таке придатне для розв'язування методом граничних елементів регуляризоване інтегральне рівняння набуде такого регуляризованого вигляду, придатного для безпосереднього впровадження у обчислювальну схему методу граничних елементів:

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + X^\theta \gamma(\mathbf{x}_0) = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (4)$$

де позначено

$$X^\theta(\mathbf{x}_0) = \left[\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}_0) + B(\mathbf{x}_0) \right]. \quad (5)$$

Аналогічно можна модифікувати й інтегральні рівняння термопружності анізотропних тіл із нитковими включеннями [3, 4]

$$\begin{aligned} & \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (\tilde{p}_J(\mathbf{x}) - \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + \\ & + \left[\int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - E_{IJ}(\mathbf{x}_0) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \right] p_J(\mathbf{x}_0) = \\ & = \tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0) - \int_L V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) - u_I^\infty(\mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (6)$$

де позначено

$$X_{IJ}(\mathbf{x}_0) = \left[\int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - E_{IJ}(\mathbf{x}_0) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \right], \quad (7)$$

а $U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ і $V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ є функціями Гріна просторової пружності та термопружності анізотропного тіла; $A_{IJ}(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x})$; $\tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}), \tilde{p}_J(\mathbf{x}))$ – модель неоднорідності; $\tilde{p}_I(\mathbf{x})$ – шукана функція.

Для числового розв'язування інтегральних рівнянь (4), (6) було реалізовано гранично-елементний метод. Геометричне представлення просторової кривої здійснювалося шляхом її дискретизації на скінченну кількість елементів із розривною квадратичною апроксимацією. Для перевірки ефективності підходу було здійснено моделювання низки тестових задач, результати яких продемонстрували високу обчислювальну ефективність методу та високу відповідність числових розв'язків очікуваним фізичним характеристикам.

Бібліографія

1. Rinaldi R.G., Blacklock M., Bale H., Begley M.R., Cox B.N. Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 3D tow representations. *J Mechanics Physics Solids*. 2012. 60. P. 1561–1581.
2. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М., Третяк Т.В. Моделювання деформівних термопружних ниткових включень в ізотропному середовищі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2021. 64, № 1. С. 73–86.
3. Pasternak Ia.M., Sulym H., Holii O. Thermoelasticity and effective properties of solids containing flexible and deformable thread-like inhomogeneities. *International Journal of Engineering Science*. 2022. 178. 103729.
4. Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H. Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagnetoelastic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017. 74. P. 70–78.